DS n°1 : Logique

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ±1 point.
La difficulté des exercices (ainsi que des questions dans chaque exercice) est progressive.

Exercice 1 : Logique et quantificateurs

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si l'assertion est vraie, on la démontrera rigoureusement. Si l'assertion est fausse, on écrira puis on démontrera sa négation.

1) $P : \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(y) \neq 0$

2) $Q : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(y) \implies x = y$

3) $R : \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = y$

4) $S : \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (f(x) = f(xy)) \implies (y = 1 \text{ ou } y = -1)$

Exercice 2 : Raisonnements

1) On considère l'assertion $\qquad P : \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (ab > b^2) \implies (a > 0 \text{ ou } b < 0)$

a) Écrire la négation de P.

b) En passant par la contraposée, déterminer si P est vraie.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
On pourra dans un premier temps exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de n.

3) On pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2} + 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} > v_n$.

Exercice 3 : Équations fonctionnelles

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$.

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Exercice 4 : Barre de Sheffer

On définit l'opérateur logique $\uparrow$, appelé *barre de Sheffer*, de la façon suivante : si P et Q sont deux assertions, on note $P \uparrow Q$ l'assertion "non(P et Q)". À l'aide des assertions P, Q et avec la barre de Sheffer comme unique opérateur logique, construire des assertions équivalentes à :

1) non$P$

2) P et Q

3) P ou Q

4) $P \implies Q$

5) P xor Q, où "xor" désigne le "ou" *exclusif*.

Exercice supplémentaire. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$